

Newton-Beschreibung: Bewegung eines Massenpunkts auf einer Oberfläche

R. Mahnke* (Univ. Rostock), J. Kaupužs (Lettische Univ. Riga)

30. Mai 2014

Zusammenfassung

Ziel dieses Kommentars ist es, die Newtonschen Ergebnisse von Frau Geisendorf (ESCP Europe Berlin), vorgetragen auf der Veranstaltung Physik trifft Volkswirtschaftslehre am 21.03.2014 an der Universität Oldenburg, zu überprüfen. Die Autoren können diese Ergebnisse nicht bestätigen und geben korrekte Newton-Gleichungen an.

1 Einleitung

Der Vortrag von Frau Prof. Dr. Sylvie Geisendorf (ESCP Europe Berlin, Umweltökonomik und Allgemeine Volkswirtschaftslehre) mit dem Titel *Einführung in die Entwicklung des ökonomischen Denkens* behandelte die Geschichte vom Merkantilismus bis heute und ging auf die gegenseitige Beeinflussung von Volkswirtschaftslehre und Physik ein. Die Vortragende erläuterte den Einfluss der Newtonschen Mechanik auf die Herausbildung der Allgemeinen Gleichgewichtstheorie – jedoch mit der wichtigen Anmerkung, dass es eben keine ökonomischen Bewegungsgleichungen gäbe, sondern ausschließlich die Gleichgewichtslage beachtet würde. Siehe:

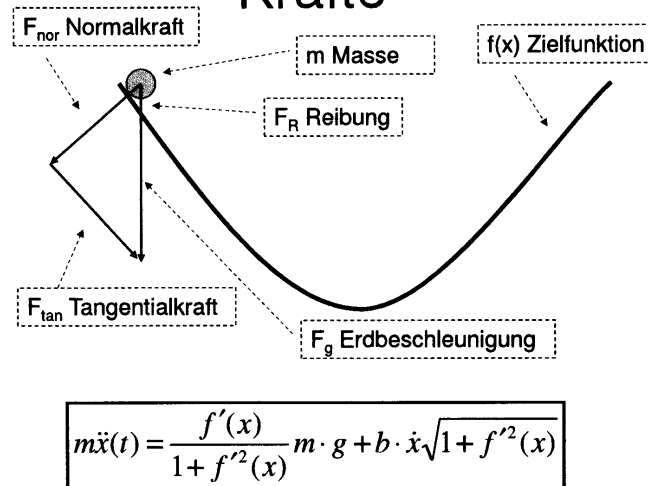
<http://www.voeoe.de/kooperationen/physik-trifft-volkswirtschaftslehre/seminar-2014/>

Im Konkreten geht die Vortragende auf die Newton-Beschreibung einer Masse auf einer Oberfläche im Schwerfeld der Erde ein, siehe Abb. 1. Dieses ist die Ausgangssituation für den folgenden Kommentar.

*E-Mail: reinhard.mahnke@uni-rostock.de

2 Ausgangssituation

Annäherung an die wirkenden Kräfte



Prof. Dr. Sylvie Geisendorf, ESCP Europe Berlin

Abb. 1: Aus dem Vortrag von Frau Sylvie Geisendorf auf der Veranstaltung *Physik trifft Volkswirtschaftslehre* an der Universität Oldenburg am 21.03.2014.

3 Newtonsche Bewegungsgleichung

Das Modell der Bewegung einer Masse auf einer (eindimensionalen) Oberfläche $y = f(x)$, in Abb. 1 *Zielfunktion* genannt, im Schwerfeld der Erde unter Berücksichtigung von Reibung lautet

$$m \dot{v}_T = F_T + \gamma F_N v_T, \quad (1)$$

$$\dot{q}_T = v_T, \quad (2)$$

wobei q_T (infinitesimaler) Weg s entlang der Oberfläche $f(x)$; v_T Geschwindigkeit in Bewegungsrichtung; $\dot{v}_T = dv_T/dt$ Beschleunigung in Bewegungsrichtung; $F = -mg$ Schwerkraft; $F_T = F \sin \alpha = -mg \sin \alpha$ Kraft in Bewegungsrichtung (Tangentialkraft); $F_N = F \cos \alpha = -mg \cos \alpha$ Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung (Normalkraft); $\gamma \geq 0$ Reibungskoeffizient und Masse m .

Hinweis: Zur Definition der Koordinaten und des Winkels α siehe auch den Anhang mit Abb. 8.

In kartesischen Koordinaten lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen (1,2) wie folgt

$$m \dot{v}_x = -mg \frac{f'(x)}{1 + f'^2(x)} - m \frac{f'(x)f''(x)}{1 + f'^2(x)} v_x^2 - mg\gamma \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} v_x, \quad (3)$$

$$\dot{x} = v_x, \quad (4)$$

wobei $f'(x) = df(x)/dx$ erste Ableitung von $y = f(x)$, $f''(x)$ die zweite Ableitung, $f'^2(x)$ Quadrat der ersten Ableitung. Die erste Zeitableitung wird bezeichnet mit $\dot{x} = dx/dt$, die zweite mit $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

Auch (3,4) schreibbar mithilfe der zweiten Zeitableitung als

$$m \ddot{x} = -mg \frac{f'(x)}{1 + f'^2(x)} - m \frac{f'(x)f''(x)}{1 + f'^2(x)} \dot{x}^2 - mg\gamma \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \dot{x}. \quad (5)$$

Ein Vergleich mit Abb. 1 zeigt nur die Übereinstimmung des ersten Terms auf der rechten Seite (wobei die y -Achse wohl nach unten gerichtet ist).

Bei einer Bewegung ohne Reibung auf einer ebenen Oberfläche (ohne Krümmung) ist nur der erste Term relevant. Der zweite Term beinhaltet die Krümmung der Oberfläche repräsentiert durch die zweite Ableitung von $f(x)$, siehe dazu das Beispiel des mathematischen Pendels als Bewegung auf einem Kreis. Der dritte Term mit dem Koeffizienten γ beschreibt die Reibung. Er ist proportional zur Geschwindigkeit \dot{x} .

4 Spezialfall: Mathematisches Pendel mit Reibung

Bewegung der Masse auf einem Kreisbogen $y = f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, wobei Radius R gleich Pendellänge. Auch (3,4) folgt damit

$$m \dot{v}_x = -mg \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R^2} x - m \frac{x}{R^2 - x^2} v_x^2 - mg\gamma \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} v_x, \quad (6)$$

$$\dot{x} = v_x. \quad (7)$$

In der üblichen Schreibweise in Polarkoordinaten $x = R \sin \varphi$ folgt aus (6,7) die Gleichung des mathematischen Pendels

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi - g\gamma \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (8)$$

mit einem (neuen) interessanten Reibungsterm.

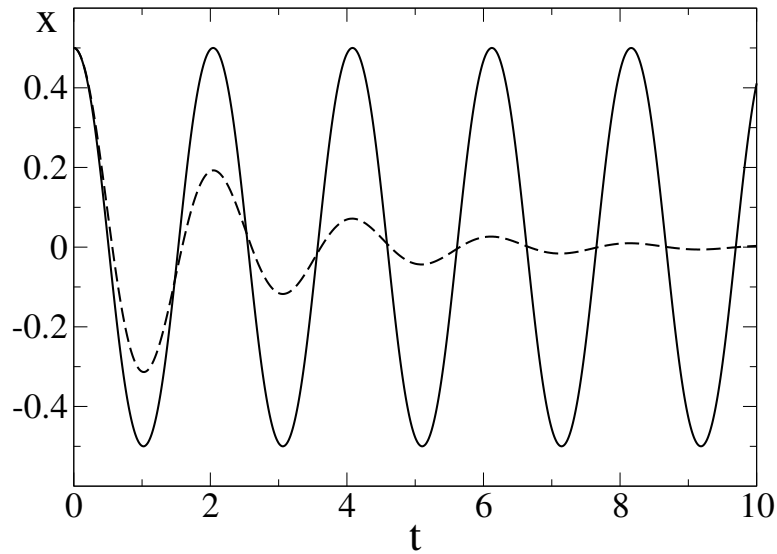


Abb. 2: Koordinate $x(t)$ (in m) abhängig von Zeit t (in s) berechnet aus (6,7) mit den Parametern $R = 1$ m, $g = 9.81$ m/s², $m = 1$ kg und den Anfangsbedingungen $x(0) = 0.5$ m, $v_x(0) = 0$ m/s für Reibungsfreiheit $\gamma = 0$ s/m (dicke Linie) und Reibungsfall $\gamma = 0.1$ s/m (getrichelte Linie).

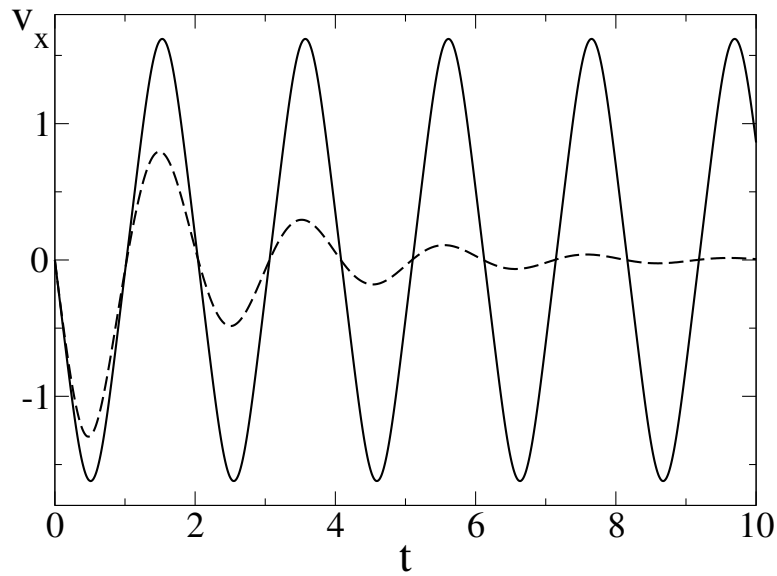


Abb. 3: Geschwindigkeit $v_x(t)$ (in m/s) abhängig von Zeit t (in s) berechnet aus (6,7) mit den Parametern $R = 1$ m, $g = 9.81$ m/s², $m = 1$ kg und den Anfangsbedingungen $x(0) = 0.5$ m, $v_x(0) = 0$ m/s für $\gamma = 0$ s/m (dicke Linie) und $\gamma = 0.1$ s/m (getrichelte Linie).

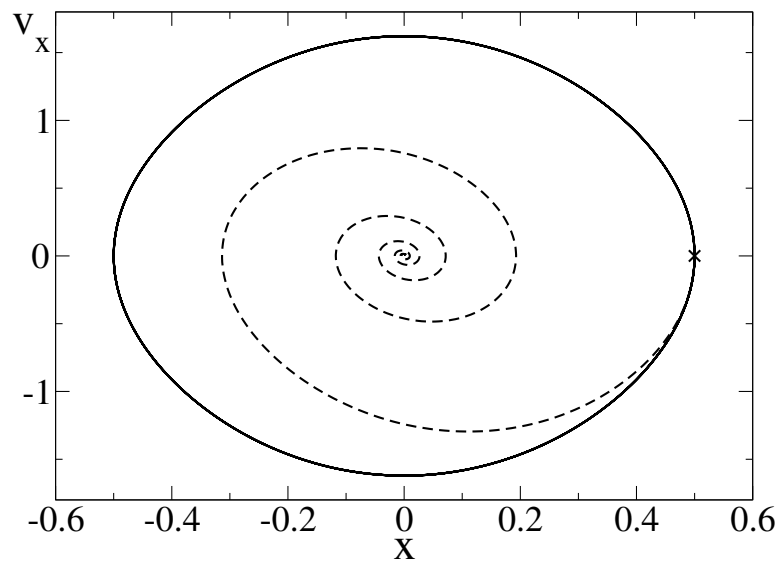


Abb. 4: Die Bahnkurve als Lösung von (6,7) im Phasenraum (Geschwindigkeit über Ort) mit den Parametern $R = 1$ m, $g = 9.81$ m/s², $m = 1$ kg für $\gamma = 0$ s/m (dicke Linie) und $\gamma = 0.1$ s/m (getrichelte Linie). Die Anfangsbedingung $x(0) = 0.5$ m, $v_x(0) = 0$ m/s ist mit einem Kreuz gekennzeichnet.

5 Bewegung auf einem Doppelmulden-Oberfläche

Bewegung auf einem Doppelmulden-Oberfläche (Term x^3 wegen Asymmetrie)

$$f(x) = \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{3}x^3 + \frac{a_4}{4}x^4, \quad (9)$$

siehe Abb. 5. Die Minima x_{min} der Funktion (9) sind an den Stellen $-(\sqrt{21}-1)/2 \approx -1.79$ und $+(\sqrt{21}+1)/2 \approx 2.79$.

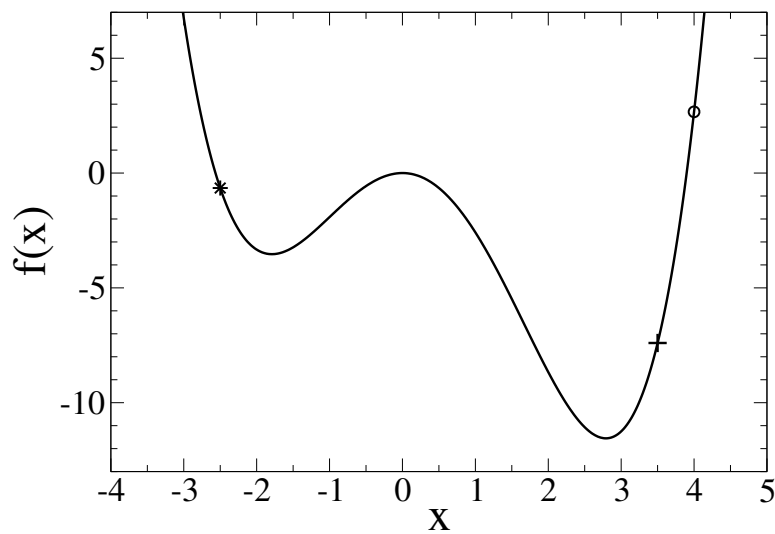


Abb. 5: Der Oberfläche (9) mit den Parametern $a_2 = -5 \text{ m}^{-1}$, $a_3 = -1 \text{ m}^{-2}$ und $a_4 = 1 \text{ m}^{-3}$. Verschiedene Anfangsorte sind gekennzeichnet mit unterschiedlichen Symbolen (Kreis, Plus und Stern).

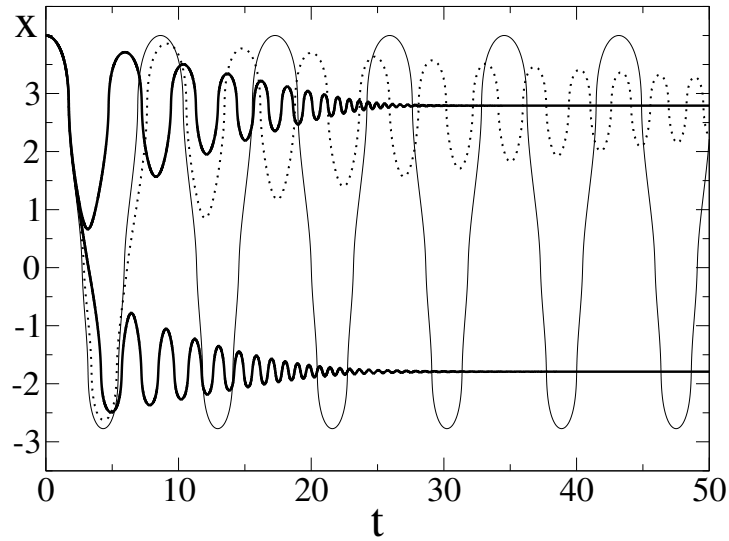


Abb. 6: Koordinate $x(t)$ (in m) abhängig von Zeit t (in s) berechnet aus (3,4) für die Oberfläche (9), gezeichnet in Abb. 5, mit den Parametern $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$ und den Anfangsbedingungen $x(0) = 4 \text{ m}$, $v_x(0) = 0 \text{ m/s}$ für $\gamma = 0 \text{ s/m}$ (dünne Linie), $\gamma = 0.03 \text{ s/m}$ (punktirierte Linie), $\gamma = 0.06 \text{ s/m}$ (untere dicke Linie) und $\gamma = 0.1 \text{ s/m}$ (obere dicke Linie).

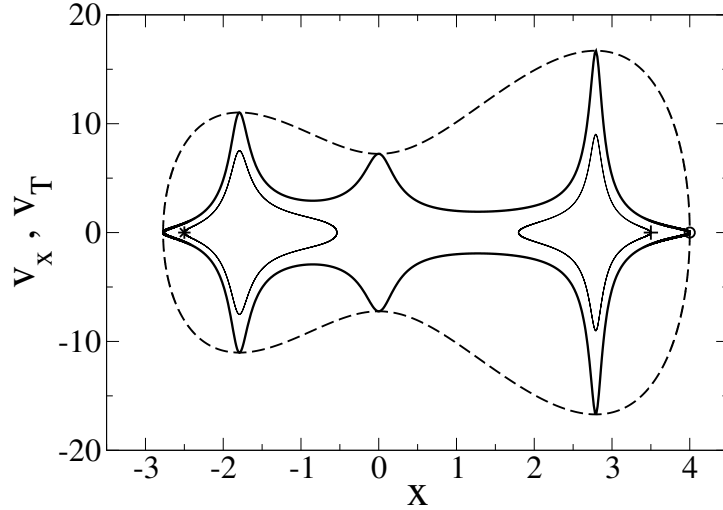


Abb. 7: Die Bahnkurve als Lösung von (3,4) im Phasenraum (Geschwindigkeit über Ort) mit den Parametern $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$ und $\gamma = 0 \text{ s/m}$ für $v_x(0) = 0 \text{ m/s}$ und verschiedene Anfangsorte $x(0)$, gekennzeichnet wie in Abb. 5. Die gestrichelte Linie zeigt die Bahnkurve für v_T bei $x(0) = 4 \text{ m}$, andere Linien – die Bahnkurven für v_x bei $x(0) = 4 \text{ m}$ (dicke Linie), $x(0) = 3.5 \text{ m}$ (rechte dünne Linie) und $x(0) = -2.5 \text{ m}$ (linke dünne Linie).

6 Schlussbemerkung

Die Veranstaltung *Physik trifft Volkswirtschaftslehre* hat Anregungen gegeben, ein bekanntes Problem in der Physik (die Bewegung auf einer Oberfläche im Schwerfeld der Erde) neu zu berechnen und zur weiteren Diskussion in anderen Fachgebieten zur Verfügung zu stellen.

7 Anhang: Herleitung der Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt sind zwei orthonormale Koordinatensysteme $\{x, y\}$ (kartesische Koordinaten) und $\{q_T, q_N\}$ (Tangente-Normale-Koordinaten), die in einem Winkel α gedreht sind, siehe dazu Abb. 8. Die Oberfläche $y = f(x)$, auf der die Bewegung erfolgt, stellt eine Zwangsbedingung dar. Somit sind die jeweiligen Koordinaten x und y bzw. q_T und q_N nicht voneinander unabhängig.

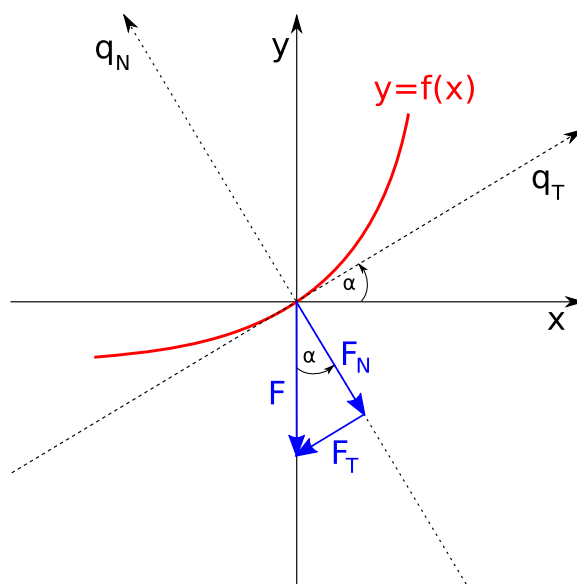


Abb. 8: Skizze mit den beiden Koordinatensystemen und der Funktion $y = f(x)$ am Punkt (x, y) . Zeichnung von Martins Brics.

Der Anstieg der Funktion $f(x)$ beträgt $f'(x) = dy/dx = \tan \alpha$. Wegen $dx = dq_T \cos \alpha$ und $dy = dq_T \sin \alpha$ gilt somit $dq_T = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + f'^2(x)}$.

Die Schwerkraft (Gewichtskraft) $F = -mg$ ist senkrecht nach unten gerichtet (in Richtung der negativen y -Achse, Abb. 8). Ihre Komponenten in Tangenten- bzw. Normalen-Richtung lauten $F_T = F \sin \alpha$ und $F_N = F \cos \alpha$. Mit $\sin \alpha = dy/dq_T = f'(x)/\sqrt{1 + f'^2(x)}$ und $\cos \alpha = dx/dq_T =$

$1/\sqrt{1+f'^2(x)}$ sind somit die Kraftkomponenten in Abhängigkeit der Ortsvariablen x bestimmt

$$F_T(x) = -mg \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \quad (10)$$

$$F_N(x) = -mg \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}. \quad (11)$$

Die zu den Koordinaten korrespondierenden Geschwindigkeiten lauten $\{v_x = dx/dt, v_y = dy/dt\}$ bzw. $\{v_T = dq_T/dt, v_N = dq_N/dt\}$. Wegen $dx = dq_T \cos \alpha$ gilt somit

$$v_x = v_T \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}. \quad (12)$$

Berechnen wir nun die Beschleunigung $\dot{v}_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ in x -Richtung. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \dot{v}_T \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} - \frac{v_T}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \frac{f'(x)f''(x)}{1+f'^2(x)} v_x \\ &= \dot{v}_T \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} - v_x^2 \frac{f'(x)f''(x)}{1+f'^2(x)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Multiplizieren wir dieses Beschleunigung mit der Masse m

$$m\dot{v}_x = m\dot{v}_T \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} - mv_x^2 \frac{f'(x)f''(x)}{1+f'^2(x)} \quad (14)$$

und ersetzen $m\dot{v}_T$ durch die Bewegungsgleichung (1). Wir erhalten

$$m\dot{v}_x = \frac{F_T + \gamma v_T F_N}{\sqrt{1+f'^2(x)}} - mv_x^2 \frac{f'(x)f''(x)}{1+f'^2(x)} \quad (15)$$

Unter Berücksichtigung der bereits berechneten Kraftkomponenten als Funktion der x -Koordinate, $F_T(x), F_N(x)$ in Gl. (10,11), und $v_T = v_x \sqrt{1+f'^2(x)}$ aus Gl. (12) folgt abschliessend

$$m\dot{v}_x = -\frac{mg f'(x)}{1+f'^2(x)} - \gamma \frac{mg v_x}{\sqrt{1+f'^2(x)}} - mv_x^2 \frac{f'(x)f''(x)}{1+f'^2(x)}. \quad (16)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Bewegungsgleichung (3) und damit auch mit der Newton-Gleichung (5). Damit ist die Herleitung beendet.